Aula 12

Nesta aula nós definimos e^{tA} para A setorial e explicamos as aplicações do e^{tA}.

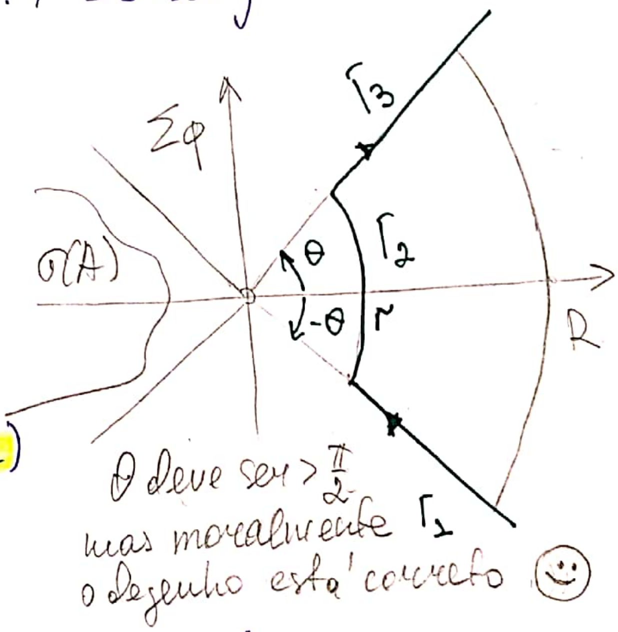
Sejam E um esp. de Banach e $A: D(A) \subseteq E \to E$ um operador setorial do ângulo $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ com constante K $\left(\|R_\lambda(A)\| \le \frac{K}{|\lambda|},\ \lambda \in \Sigma_\varphi \right)$. Seja $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$

Definimos $\Gamma_1 = \{ \lambda = \gamma_1(s) = (-s)e^{-i\theta} : -\infty < s \le -r \} =$
$= \{ \lambda = s e^{-i\theta} : r \le s < \infty \}$

$\Gamma_2 = \{ \lambda = \gamma_2(s) = r e^{i\alpha} ; -\theta \le \alpha \le \theta \}$

$\Gamma_3 = \{ \lambda = \gamma_3(s) = s e^{i\theta} : r \le s < \infty \}$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$



Def 1 Seja $t > 0$,

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{t\lambda} (\lambda - A) d\lambda, \quad (1)$$

onde $\Gamma_R = \Gamma \cap \bar{B}_R(0)$, $R > r$

Mostremos que limite em (1) existe.

Lema 1 Integral em (1) converge absolutamente em $B(E)$ e define um operador $e^{tA} \in B(E)$ que não depende da escolha de $r > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$.
Além disso, $\|e^{tA}\| \le M$ $\forall t > 0$, onde $M = M(K, \theta) > 0$

Demonstração Usando $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{K}{|\lambda|}$ em Γ,

obtemos

$$\left|\int_{\Gamma_R} \|e^{t\lambda}(\lambda-A)^{-1}\|\,|d\lambda|\right| \le \underbrace{K\int_r^R \frac{\exp(ts\,\mathrm{Re}\,e^{-i\theta})}{|se^{-i\theta}|}\,|e^{-i\theta}|\,ds}_{\text{estimativa da parte com } \Gamma_1} +$$

$$+\underbrace{K\int_{-\theta}^{\theta} \frac{\exp(tr\,\mathrm{Re}\,e^{i\alpha})}{|re^{i\alpha}|}\,|ire^{i\alpha}|\,d\alpha}_{\text{parte com } \Gamma_2} +$$

$$+\underbrace{K\int_r^R \frac{\exp(ts\,\mathrm{Re}\,e^{i\theta})}{|se^{i\theta}|}\,|e^{i\theta}|\,ds}_{\text{parte com } \Gamma_3} \le$$

$$\le K\left(2\int_r^\infty \frac{e^{ts\cos\theta}}{s}\,ds + \int_{-\theta}^{\theta} e^{tr\cos\alpha}\,d\alpha\right) \le \{\sigma = -st\cos\theta\}$$

$$\le K\left(2\int_{rt|\cos\theta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}(-t\cos\theta)\frac{d\sigma}{-t\cos\sigma} + 2\theta e^{tr}\right) =$$

$$= K\cdot C(r,t,\theta) \quad \forall\, R>0,\ t>0. \qquad (1a)$$

Já que $(r,\infty) \ni R \longmapsto \int_{\Gamma_R} \|R_\lambda(A)\,e^{t\lambda}\|\,d\lambda$ é crescente e limitada superiormente, $\exists \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \|R_\lambda(A)\,e^{tA}\|\,d\lambda$

$\Rightarrow$ limite em (1) existe absolutamente em $B(E)$

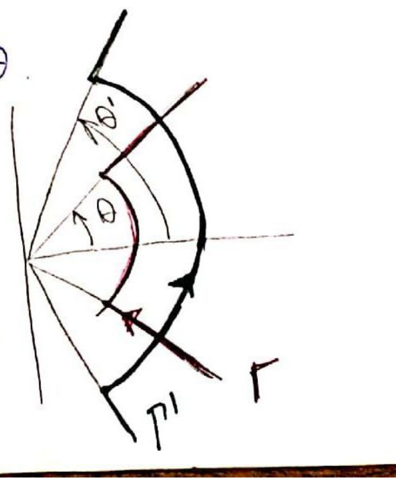
e $\|e^{tA}\| \le \frac{K}{2\pi} C(r,t,\theta)$ $\left(\|e^{tA}\| = \lim_{R\to\infty} \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\,d\lambda\right\| \le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \|e^{\lambda t} R_\lambda(A)\|\,d\lambda \le \frac{1}{2\pi} K\,C(r,t,\theta)\right)$

Mostremos que (1) não depende de $r>0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$.

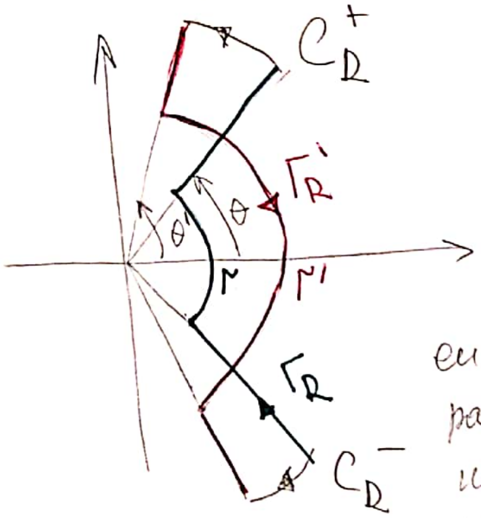
Definimos $\Gamma' = \Gamma_r(r',\theta')$ para alguns $r'>0$ e $\theta' \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$, onde assumimos que $\theta' \ge \theta$.

Temos $\Gamma'_R = \Gamma' \cap \bar{B}_R(0)$ e escolhemos $R > r, r'$.

θ e θ' devem ser $> \frac{\pi}{2}$

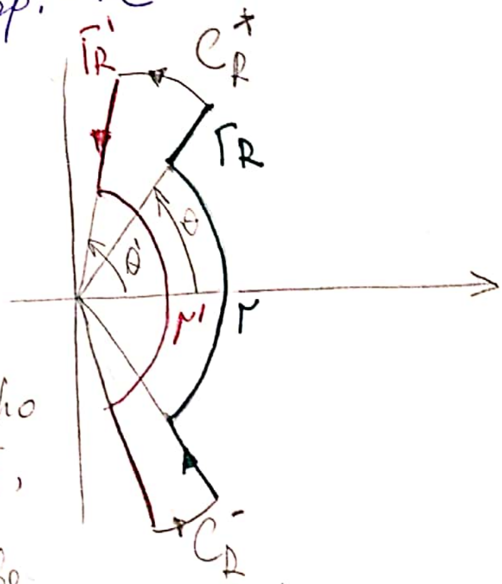


Sejam C_R^+ e C_R^- os arcos das circunferências que juntam pontos extremais de Γ_R e Γ_R' em $\{\operatorname{Im}\lambda > 0\}$ e $\{\operatorname{Im}\lambda < 0\}$ resp.-te



eu fiz desenho para $\theta, \theta' < \frac{\pi}{2}$, mas isso não importa

Caso $r' > r$



Caso $r' < r$

Seja $S_R = \Gamma_R \cup C_R^+ \cup (-\Gamma_R') \cup (-C_R^-)$ $\Rightarrow$

$$\int_{S_R} e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0$$ (Já que $e^{t\lambda}(\lambda-A)^{-1}$ é holomorfa em Σ_φ).

Agora $$\left\| \int_{C_R^+} e^{t\lambda}(\lambda-A)^{-1} d\lambda \right\| \leq \int_\theta^{\theta'} e^{tR \operatorname{Re} e^{i\alpha}} \frac{K}{|Re^{i\alpha}|} |iRe^{i\alpha}| d\alpha \leq$$

$$\leq K(\theta' - \theta) e^{tR\overset{<0\ (\theta > \frac{\pi}{2})}{\cos\theta}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$ Similarmente

$$\left\| \int_{C_R^-} \right\| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$ Logo, concluímos que

$$\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{t\lambda}(\lambda-A)^{-1} d\lambda =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{S_R}}_{=0} - \underbrace{\int_{C_R^+}}_{\to 0} + \int_{\Gamma_R'} + \underbrace{\int_{C_R^-}}_{\to 0} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R'} e^{t\lambda}(\lambda-A)^{-1} d\lambda$$

Teorema 1 Seja A um operador setorial de ângulo $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Suponha que e^{tA} está definido por (1) para $t>0$ e assume que $e^{0A} = I$ $\Rightarrow$

1) $e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA} = e^{(t+s)A}$, $t,s \geq 0$ (e^{tA} é semigrupo)

2) $t \to e^{tA}$ pertence ao $C^1((0,\infty), B(E))$, Além disso $e^{tA}E \subseteq D(A)$, $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ e $\|Ae^{tA}\| \leq \frac{C}{t}$, $C>0$, $t>0$. Também temos $Ae^{tA}x = e^{tA}Ax$, $\forall x \in D(A)$, $t \geq 0$

3) Seja $x \in E \Rightarrow \lim_{t\to 0} e^{tA}x$ existe em E sse $x \in \overline{D(A)}$. Neste caso, $\lim_{t\to 0} e^{tA}x = x$

(para A densamente definido sempre temos $\lim_{t\to 0} e^{tA}x = x$)

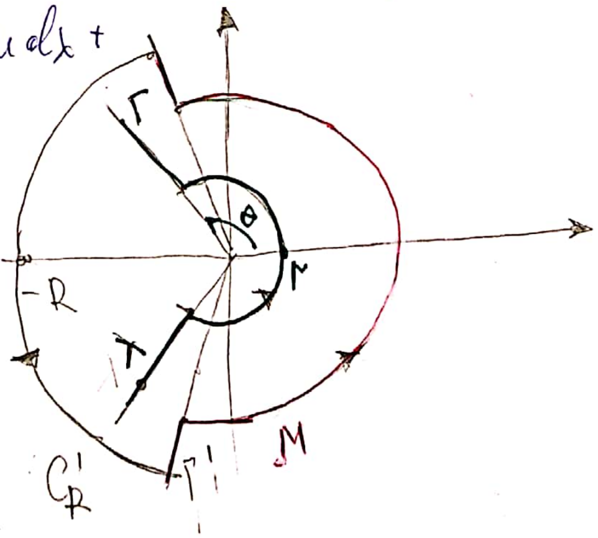
Demonstração 1) Sejam $t,s>0$. Suponha que $0<r<r'$ e $\frac{\pi}{2}<\theta'<\theta<\varphi$ $\Rightarrow$ usando T. de Fubini obtemos:

$$e^{tA}e^{sA} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\underset{\Gamma(r,\theta)}{\Gamma}}\int_{\underset{\Gamma(r',\theta')}{\Gamma'}} e^{t\lambda}e^{s\mu}R_\lambda(A)R_\mu(A)\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}\frac{e^{t\lambda}e^{ts}}{\mu-\lambda}\left(R_\lambda(A)-R_\mu(A)\right)d\mu\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{t\lambda}R_\lambda(A)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{s\mu}R_\mu(A)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{t\lambda}}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu \qquad (2)$$



Fixa um $\lambda \in \Gamma$ e pegue $R > \max\{r, r', |\lambda|\}$.

Seja $C'_R = \{z = Re^{i\alpha} : \theta' \leq \alpha \leq 2\pi - \theta'\}$ e $S'_R = \Gamma'_R \cup C'_R$

Por formula de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_R'} \frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu = e^{s\lambda}$ (5)

Como no Lema 1, pode-se mostrar que

$$\exists \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R'} \frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu = \int_{\Gamma'} \frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu \quad e$$

$$\left|\int_{C_R'} \frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu\right| \leq 2\pi R \sup_{\mu\in C_R'} \frac{e^{s\operatorname{Re}\mu}}{|\mu-\lambda|} \leq e^{sR\cos\theta'}\frac{2\pi R}{R-|\lambda|} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Logo $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{e^{s\mu}}{\mu-\lambda}\,d\mu = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R'} = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R'} - \int_{C_R'} =$

$= e^{s\lambda}$.

Fechando Γ_R com arco

$C_R = \{z = Re^{i\alpha} : \theta \leq \alpha \leq 2\pi-\theta\}$, analogamente mostramos que $0 = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}\,d\lambda$. Finalmente de (2) temos:

$$e^{tA}\cdot e^{sA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}e^{s\lambda}R_\lambda(A)\,d\lambda = e^{(t+s)A} = e^{sA}\cdot e^{tA}$$

2) Sejam $x\in E$, $t>0$, $\varepsilon>0$, $R>r$. Observo que as somas de Riemann para $\int_{\Gamma_R} e^{t\lambda}R_\lambda(A)\,d\lambda$ convergem em $[D(A)] = (D(A), \|\cdot\|_A)$ desde que o mapeamento $\lambda \to R_\lambda(A)$ é contínuo em $B(E,[D(A)])$.

Logo, obtemos, $A\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}R_\lambda(A)\,d\lambda \overset{(*)}{=} \int_{\Gamma_R} e^{t\lambda} \overset{A-\lambda+\lambda}{A} R_\lambda(A)\,d\lambda =$

$= \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\lambda R_\lambda(A)\,d\lambda - \int_{\Gamma_R} e^{t\lambda}\,d\lambda\, I$ (3)

No passo (*) usei o fato: [Se $A \in B(E_2, E_3)$ e $C_n \in B(E_1, E_2)$ e $C_n \to C$ em $B(E_1, E_2)$ $\Rightarrow$ $AC_n \to AC$ em $B(E_1, E_3)$.] De fato, neste caso C_n é a soma de Riemann de $\int_{\Gamma_R} e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda$ que fica em $B(\underset{E_1}{\underset{\parallel}{E}}, \underset{E_2}{\underset{\parallel}{[D(A)]}})$ e $A \in B(\underset{E_2}{\underset{\parallel}{[D(A)]}}, \underset{E_3}{\underset{\parallel}{E}})$. (2º metodo para mostrar (*): use somas de Riemann de $\int_{\Gamma_R} e^{t\lambda}R_\lambda(A)\,d\lambda$ e o fato que A é fechado)

Consideremos de novo $C_R = \{z = Re^{i\alpha} : \theta \le \alpha \le 2\pi - \theta\}$ $\Rightarrow$ Teorema de Cauchy $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R \cup C_R} e^{t\lambda}\, d\lambda = 0$$

$\Gamma_R \cup C_R \leftarrow$ curva fechada

$$\left|\int_{\Gamma_R} e^{t\lambda}\, d\lambda\right| = \left|-\int_{C_R} e^{t\lambda}\, d\lambda\right| \le 2\pi R \sup_{\theta \le \alpha \le 2\pi-\theta} e^{tR\cos\alpha} \le 2\pi R e^{\varepsilon R\cos\theta} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

uniformemente para $t \ge \varepsilon$. Além disso, como na demonstração do Lema 1 com $r = \frac{1}{t}$ obtemos

$$\left|\int_{\Gamma_R} \|\lambda e^{t\lambda} R_\lambda(A)\|\, d\lambda\right| \underset{(1a)}{\le} K\left(2\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{s}{s} e^{ts\cos\theta}\, ds + \int_{-\theta}^{\theta} r e^{\cos\alpha}\, d\alpha\right) \le$$

$$\le \frac{2K}{t|\cos\theta|} + \frac{2eK\theta}{t} = \frac{C'}{t} \quad (4) \Rightarrow \text{integral em (3)}$$

converge absolutamente:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\lambda R_\lambda(A)\, d\lambda = \int_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda R_\lambda(A)\, d\lambda.$$

Mostremos que $e^{tA}(E) \subseteq D(A)$.

Seja $x \in E$ $\Rightarrow$ provamos que

$$\begin{cases} A\big(\overbrace{\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda\big)x}^{z_R} \xrightarrow{R\to\infty} y = \int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda \\ \underbrace{\big(\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda\big)x}_{z_R \in D(A)} \xrightarrow[R\to\infty]{} e^{tA}x \end{cases}$$

Como A é fechado $e^{tA}x \in D(A)$. $\Rightarrow e^{tA}(E) \subseteq D(A)$ (7)

(Prove que $\left(\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda\right) x \in D(A)$ usando as somas de Riemann e o fato que A é fechado)

Do outro lado $A(e^{tA}x) = y = \left(\int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda\right) x \overset{(4)}{\Rightarrow}$

$\|A e^{tA}\| \leq \frac{C'}{2\pi t}$, $t > 0$.

Do outro lado, temos $\|\int_{\Gamma \setminus \Gamma_R} \lambda e^{t\lambda} R_\lambda(A) d\lambda\| \leq 2K \int_R^\infty e^{ts\cos\theta} ds$

$\leq \frac{2K}{\varepsilon |\cos\theta|} e^{R\varepsilon\cos\theta} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ uniformemente para $t \geq \varepsilon$.

Logo, $\int_{\Gamma_R} \lambda e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda$ converge uniformemente em $B(E)$ para $t \geq \varepsilon \Rightarrow$ $t \to e^{tA} \in B(E)$ é continuamente derivável ~~em~~ para $t > 0$ com $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ (tome o limite em)

Se $x \in D(A) \Rightarrow A e^{tA} x = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R_\lambda(A) A x\, d\lambda = e^{tA} A x$.

3) Seja $x \in D(A)$, $R > r$ e $t > 0$. Como na parte 1), usando formula de Cauchy, podemos concluir:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \lim \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda = 1$$

Observando que $\lambda R_\lambda(A) x - x = R_\lambda(A) A x$, concluimos

$$e^{tA}x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} \left(R_\lambda(A) - \frac{1}{\lambda}\right) x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} (\lambda R_\lambda(A) - 1) x$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R_\lambda(A) A x\, d\lambda$$

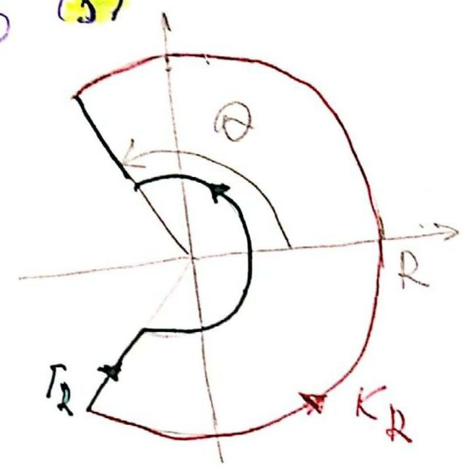
Observando que $\| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R_\lambda(A) A x \| \leq | \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} | \frac{K}{|\lambda|} \|Ax\|$ (8)

$\leq \frac{C}{|\lambda|^2}$ $\forall t \in (0,1]$ (precisamos t perto do 0) e aplicando do Teorema da convergência dominada, concluímos

que $\exists \lim_{t \to 0} e^{tA} x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R_\lambda(A) A x \, d\lambda =: z$

Seja $K_R = \{ R e^{i\alpha} : -\theta \leq \alpha \leq \theta \}$. Teorema de Cauchy

implica que $\int_{\Gamma_R \cup (-K_R)} \frac{1}{\lambda} R_\lambda(A) A x \, d\lambda = 0$ (5)



Já que $\| \int_{-K_R} \frac{1}{\lambda} R_\lambda(A) A x \, d\lambda \| \leq$

$\leq \frac{2\pi R K}{R^2} \|Ax\| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ $\overset{\Rightarrow}{(5)}$

$z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R_\lambda(A) x \, d\lambda = 0$. Finalmente,

$\lim_{t \to 0} e^{tA} x = x$, $x \in D(A)$. Mostremos essa igualdade para $x \in \overline{D(A)}$. Seja $x \in \overline{D(A)}$ e $\{x_n\} \subset D(A)$ t.q.

$x_n \xrightarrow[E]{} x$. $\Rightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N_0$ tal que

$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $\| e^{tA}(x_n - x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$ (Já que $\|e^{tA}\| \leq M$ por Lema 1)

Agora $\| e^{tA} x - x \| \leq \| e^{tA}(x - x_n) \| + \| e^{tA} x_n - x_n \| + \underbrace{\| x - x_n \|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$

$\leq \varepsilon$ para t suf-te pequeno

$\Rightarrow \lim_{t \to 0} e^{tA} x = x$, $x \in \overline{D(A)}$

Reciprocamente, se $\overset{\in D(A)}{e^{tA} x} \xrightarrow[t \to 0]{} \overset{\in \overline{D(A)}}{y}$ $\Rightarrow y \in \overline{D(A)}$ por parte a) (de fato $e^{tA}(E) \subseteq D(A)$)

Alem disso $R_1(A) e^{tA} x = e^{tA} R_1(A) x \xrightarrow[t \to 0]{} R_1(A) x$

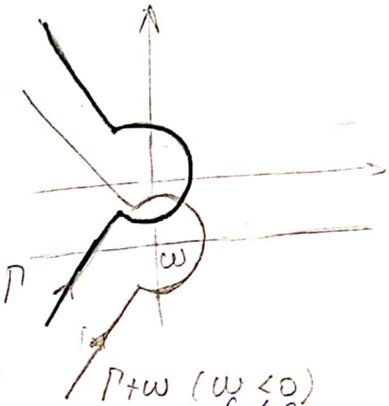
Já que $R_1(A) x \in D(A)$. Logo temos $\begin{cases} R_1(A) e^{tA} x \to R_1(A) x \\ R_1(A) e^{tA} x \to R_1(A) y \end{cases}$

$\Rightarrow R_1(A) x = R_1(A) y \Rightarrow \underline{x = y \in \overline{D(A)}}$

Observação 1) Suponha que $A_\omega = A - \omega I$ é setorial do ângulo $\varphi > \frac{\pi}{2}$ para algum $\omega \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$$e^{\omega t} e^{tA_\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{t(\lambda+\omega)} R_{\lambda+\omega}(A)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega+\Gamma} e^{\mu t} R_\mu(A)\, d\mu =: e^{tA}, \quad t > 0$$



É fácil ver que $e^{At} = e^{\omega t} e^{tA_\omega}$ vai ter as propriedades como no caso de $\omega = 0$.

2) As aplicações principais do Teorema 1 estão nos problemas do tipo parabólico.

Por exemplo, consideremos o problema

$$u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

onde A é setorial com $\varphi > \frac{\pi}{2}$, $u_0 \in \overline{D(A)}$. $\Rightarrow u(t) = e^{tA} u_0$, $t \geq 0$ é a única solução em $C^1((0,\infty), E) \cap C((0,\infty), [D(A)]) \cap C(\mathbb{R}_+, E)$, onde

- $C^1((0,\infty), E)$ é espaço das funções continuamente deriváveis com $u : (0,\infty) \mapsto E$

$$\|u\|_{C^1} = \sup_{t \in (0,\infty)} \|u(t)\|_E + \sup_{t \in (0,\infty)} \|u'(t)\|_E < \infty$$

- $C((0,\infty), [D(A)])$ — || — contínuas com

$$\|u\| = \sup_{t \in (0,\infty)} \left(\|u(t)\|_E + \|Au(t)\|_E \right) < \infty$$

• $C(\mathbb{R}_+, E)$ — || — contínuas com

$\|u\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E < \infty$.

<u>Demonstração</u> Existência da solução segue do

Teorema 1. Suponha que $v(t)$ é solução diferente.

Seja $0 < \varepsilon \le s \le t - \varepsilon < t \underset{T1.2)}{\Longrightarrow}$ ← regra do produto

$$\frac{d}{ds} e^{(t-s)A} v(s) = -e^{(t-s)A} Av(s) + e^{(t-s)A} v'(s) =$$

$$= e^{(t-s)A} \underbrace{(v'(s) - Av(s))}_{=0} = 0 \Rightarrow e^{(t-s)A} v(s) = \text{const}$$

$$\Rightarrow e^{(t-\varepsilon)A} v(\varepsilon) = e^{\varepsilon A} v(t-\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} e^{tA} u_0 = v(t) \text{ já que}$$

$\tau \mapsto e^{\tau A} x$ é contínuo para $\tau \geq 0$ e $x \in \overline{D(A)}$.

3) Consideremos mais uma aplicação do Teor. 1

: à uma EDP. típica.

Seja $E = C[0,1]$, $D(A) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$,

$Au = u''$. Seja $u_0(x) \in C_0[0,1] = \overline{D(A)} \Rightarrow$ a função

$u(t,x) = u(t) = e^{tA} u_0(x_0)$, $t \geq 0$ pertence a

$C(\mathbb{R}_+, C[0,1]) \cap C((0,\infty), C^2[0,1]) \cap C^1((0,\infty), C[0,1])$

e unicamente resolve EDP:

$$\partial_t u(t,x) = \underset{Au(t,x)}{\partial_{xx} u(t,x)}, \quad t > 0, \ x \in [0,1]$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t > 0$$

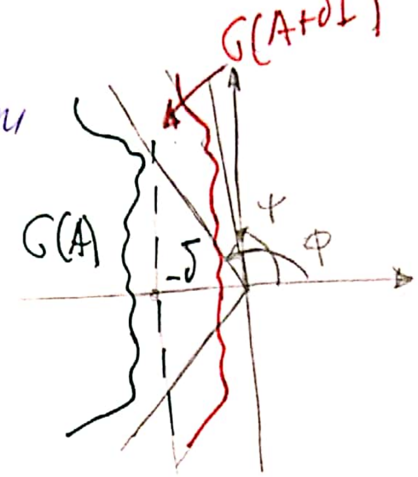
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1]$$

O seguinte Teorema contém condição suficiente para garantir que as soluções das problemas consideradas em cima $\underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema 2 Seja A setorial do ângulo $\varphi > \frac{\pi}{2}$ e $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < -\delta < 0$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|e^{tA}\| \le Ce^{-\delta t}$, $t > 0$.

Demonstração Observe que

$A_{-\delta} = A + \delta I$ é setorial do algum ângulo $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$.



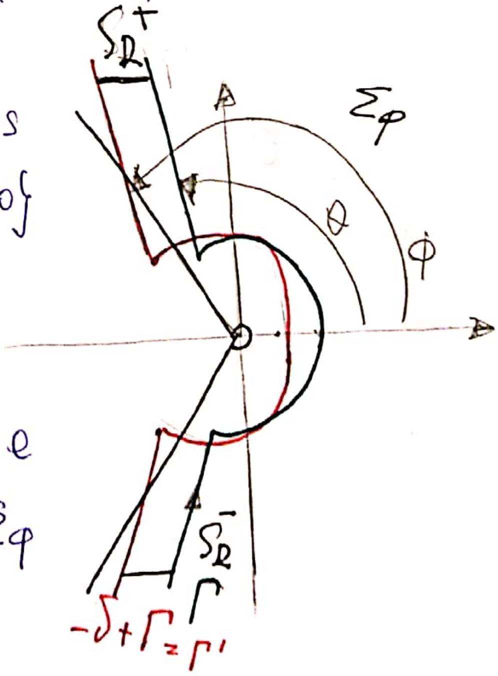
Seja $\Gamma = \Gamma(r, \theta)$, $r > 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \psi)$

$\Rightarrow$ pela observação anterior 1)

temos
$$e^{tA} := \int_{\underbrace{-\delta+\Gamma}_{=\Gamma'}} e^{\mu t} R_\mu(A)\, d\mu = e^{-\delta t} e^{tA_{-\delta}}. \quad (6)$$

Do Lema 1 segue que $\|e^{tA_{-\delta}}\| \le C$, $t > 0$. Para concluir a demonstração basta conferir que operador e^{tA} definido na (6) coincide com $e^{tA} = \int_\Gamma e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda$, ou seja provar que

$$\int_{-\delta+\Gamma} e^{t\mu} R_\mu(A)\, d\mu = \int_\Gamma e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda, \quad t > 0 \quad (7)$$



Sejam $R > r$ e $S_R^\pm$ segmentos horisontais que ligam Γ_R e Γ_R' em $\{\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ e $\{\operatorname{Im}\lambda < 0\}$

Seja $C_R = \Gamma_R \cup S_R^+ \cup (-\Gamma_R') \cup (-S_R^-) \subset \rho(A)$.

Pelo T. de Cauchy $\int_{C_R} e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda = 0$.

Observe que $|S_R^\pm| = \delta$ e $\operatorname{Re}\lambda \le R\cos\theta < 0$ e $|\lambda| \geqslant R$ para $\lambda \in S_R^\pm$. Como $\theta < \varphi$, $S_R^\pm \subset \Sigma_\varphi$ para R suf-te grande $\Rightarrow$

$$\left\| \int_{S_R^\pm} e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda \right\| \le \frac{\delta K}{R} e^{Rt\cos\theta} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{segue (7)}.$$